



TITLE:

# $H^p$ 空間の実解析的構成 (実解析的手法によるHardy空間と多変数フーリエ解析の研究)

AUTHOR(S):

金子, 誠

---

CITATION:

金子, 誠.  $H^p$ 空間の実解析的構成 (実解析的手法によるHardy空間と多変数フーリエ解析の研究). 数理解析研究所講究録 1980, 383: 1-20

ISSUE DATE:

1980-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104848>

RIGHT:

# $H^p$ 空間の実解析的構成

東北大・教養 金子 誠

1. Atomによる構成 E.M. Stein & Weiss は [16] において  $R_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in R^n, y > 0\}$  における調和函数で.

$$(1) \quad \sum_{j=0}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j \neq k)$$

(ここで  $x_0 = y$ ) なる  $(n+1)$  個の函数の組  $F = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  を考えた.  $n=1$  の場合は, 複素上半平面における, 解析函数の, 実部と虚部の組みであり, (1) は Cauchy-Riemann の等式である.

$p_1 = (n-1)/n$  とおくならば,  $S = |F|^{p_1} = (\sum_{j=0}^n |u_j|^2)^{p_1/2}$  が, 劣調和である事が重要な性質である.  $p > p_1$  ならば,  $\phi = p/p_1$  とおけば,  $\phi > 1$  であって,

$$\int_{R^n} \{S(x, y)\}^\phi dx = \int_{R^n} |F(x, y)|^p dx.$$

従って,  $\sup_{y>0} \int_{R^n} |F(x, y)|^p dx < \infty$  ならば,  $S(x, y) \leq P_y * f(x)$  となる  $f \in L^\phi(R^n)$  が存在する. ここで,  $P_y(x)$  は,  $R_+^{n+1}$  における Poisson 核である.  $f \in L^\phi(R^n)$  の

Poisson 積分  $E_y * f$  は 扱っ易い.

(1) は,  $F$  が ある調和函数の gradient である事を意味する. それより,  $p \leq p_k$  なる  $p$  に対しても次のような事が考えられる.

$p_k = (n-1)/(n-1+k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) として,  $(n+1)^k$  個の函数の組 (rank  $k$  の tensor) である  $F = (u_{j_1 \dots j_k})$  が次の性質を持つものとする.

$$u_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} u_{j_1 \dots j_k} \quad (j_{k+1} = 0, 1, \dots, n)$$

とあくと, rank  $(k+1)$  の tensor  $(u_{j_1 \dots j_k j_{k+1}})$  が symmetric で trace が 0 となる. つまり,

$$(2) \quad u_{j_1 \dots j_k j_\mu j_\nu j_{k+1}} = u_{j_1 \dots j_k j_\nu j_\mu j_{k+1}}, \quad \sum_{j=0}^n u_{j_1 \dots j_k \hat{j}_\mu \hat{j}_\nu j_{k+1}} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

このとき やはり  $|F|^p = \left( \sum_{j_1 \dots j_k=0}^n |u_{j_1 \dots j_k}|^2 \right)^{p/2}$  が, 非調和となる. 従って,  $p > p_k$  に対して, 先に述べた事と同様の性質がある.  $p > p_k$  に対して, 上のような  $F$  の集合として,

$$\mathcal{F}^p = \left\{ F = (u_{j_1 \dots j_k}) \mid \|F\|_{\mathcal{F}^p} = \sup_{y>0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

とおく. [14] にも述べられているように 次の命題が成立する.

Proposition 1  $p \geq 1$  のとき  $F = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}^p$

なる為の 必要十分条件は,  $u_0 = P_j * f$ ,  $u_j = P_j * (P_j f)$  ( $j=1, \dots, n$ )  
 となる  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  が存在する事である. ここで  $P_j f$  は,  $f$   
 の Riesz 変換である.

$\mathbb{R}_+^{n+1}$  上の調和函数  $u$  が,  $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx < \infty$  なら  
 は,  $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$  が  $\mathcal{S}'$  の意味で存在する. しかも  
 $u$  は,  $f$  によって, 完全に決, てしまう.  $F = (u_{j_1 \dots j_k})$  が  
 $\mathcal{F}^p$  の元ならば,  $f_{j_1 \dots j_k} = \lim_{y \rightarrow 0} u_{j_1 \dots j_k}(\cdot, y)$  が定まるが,  
 (2) の関係より,  $u_{j_1 \dots j_k}$  は  $u_{0 \dots 0}$  によって決, てしまう. そこ  
 で, C. Fefferman - E. M. Stein [7] は,  $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$  を次のように定  
 義した.  $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$  は,  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  上の調和函数より成る集合で,

(i)  $1 < p < \infty$  の場合

$$u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \iff \|u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})} = \sup_{y>0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

(ii)  $p > p_c = (n-1)/(n-1+k)$  なる場合

$$u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \iff \exists F = (u_{j_1 \dots j_k}) \in \mathcal{F}^p; u = u_{0 \dots 0}$$

として, この場合  $\|u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})} = \|F\|_{\mathcal{F}^p}$ .

このように定義した Hardy class  $H^p$  が, 種々の形で, 特  
 徴付けらる事を, C. Fefferman - E. M. Stein [7] が示した. それ  
 を次の定理にまとめおく. さらに, この定理が, 上のよう  
 な定義に, 矛盾の無い事を自保証する.

定理 1  $u$  は,  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  で調和とする. このとき, 次の

(A) から (E) は同値である.

$$(A) \quad u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}).$$

$$(B) \quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |u(z,y)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$(C) \quad u^+(x) = \sup_{y>0} |u(x,y)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$(D) \quad \mathcal{S}'(u)(x) = \left( \int_{|x-z|<y} |\nabla u(z,y)|^2 y^{1-n} dz dy \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{そして } \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = 0.$$

$$(E) \quad \mathcal{J}(u)(x) = \left( \int_0^{\infty} |\nabla u(x,y)|^2 y dy \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{そして } \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = 0.$$

先に述べたように、 $u \in H^p$  は境界値をもつ。そして定理の形で述べておく。

定理2  $u \in H^p$  ならば、 $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$  が  $\mathcal{S}'$  の意味で存在し、 $f$  は  $u$  を決定する。

定理2における  $f$  が、実は  $H^p$  を完全に決定する。

定理3  $1 < p < \infty$ ,  $f \in \mathcal{S}'$  に対して、次の (A) から (D) は同値となる。

$$(A) \quad u^+(x) = \sup_{y>0} |(q_y * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{となる。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x) dx \neq 0 \quad \text{なる } q \in \mathcal{S} \quad \text{が存在する。}$$

$$(B) \quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |(q_y * f)(z)| \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{となる。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x) dx \neq 0 \quad \text{なる } q \in \mathcal{S} \quad \text{が存在する。}$$

(C) 十分大なる  $N_0$  をとり

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \bar{\Phi} \in \mathcal{S} : \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N_0} \sum_{|\alpha| \leq N_0} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \bar{\Phi}(x) \right|^2 dx \leq 1 \right\}$$

とおくとき

$$f^*(x) \equiv \sup_{\bar{\Phi} \in \mathcal{C}} \sup_{|x-z| < y} |(\bar{\Phi}_y * f)(z)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(D)  $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$  なる  $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$  が存在する.

上の定理において,  $\varphi_y(x) = y^{-n} \varphi(y^{-1}x)$  である. (Fefferman, E.M. Stein [7]) は, (C) を convolution operator の評価に用いて, その有用性を述べている.

定理より, Hardy class を, その境界値の集合としてとらえ, 次のような定義を置く.

$$H^p(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{S}' ; f \text{ は (A) } \sim \text{(D) のいずれかを満たす} \right\}$$

定義として, (B) を採用して,  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$  に対して  $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  とする事が多いようである. このように定義された  $H^p(\mathbb{R}^n)$  の一つの特徴付けとして 次の事が成立する.

Proposition 2 (A. Miyachi [12], P. Sjölín [13])  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  とすれば,  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$  なることと,  $R_{j_1} \cdots R_{j_n} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $j_1, \dots, j_n = 1, \dots, n$ ) なる事は同値である.

C. Fefferman [6] は次の事を示した.

定理4  $(H')^* = BMO$

ここで  $g \in BMO$  であるとは.

$$\|g\|_{BMO} = \sup_Q \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx < \infty$$

ここで  $Q$  は  $\mathbb{R}^n$  における立方体で,  $c$  は定数である. この定義と 定理4 とより,  $f \in H'(\mathbb{R}^n)$  なる事と  $f = \sum f_\alpha$ ,  $\int_Q f_\alpha(x) dx = 0$ ,  $\text{supp } f_\alpha \subset Q$ ,  $\sum |Q| \|f_\alpha\|_\infty < \infty$  と書ける事とが同値である. (C. Fefferman, [2], [10] 参照)

R. R. Coifman [2], R. H. Latter [11], A. Uchiyama [19] は, 定理3の性質 (C) を用いて, 上の C. Fefferman の結果を constructive に証明している.  $\alpha$  が  $p$ -atom であるとは, 或る ball  $B$  が存在して  $\text{supp } \alpha \subset B$ ,  $\|\alpha\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) x^\alpha dx = 0$  ( $|\alpha| \leq n(\frac{1}{p} - 1)$ ) なる性質を持つ事である. Coifman-Latter-Uchiyama の結果は 次の通りである.

定理5  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$  なる事と  $f = \sum_j \lambda_j g_j$ ,  $g_j$  は  $p$ -atom,  $\sum |\lambda_j|^p < \infty$  と書ける事は同値である. そして

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \inf \{ (\sum |\lambda_j|^p)^{1/p}, f = \sum \lambda_j g_j, g_j \text{ は } p\text{-atom}, \sum |\lambda_j|^p < \infty \}$$

なお,  $H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p < 1$ , の dual が Lipschitz class  $\Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$ , である事は Duren-Romberg-Shields [5] (Duren [4] 参照), A. P. Fragier [8], T. Walsh [20] が示している.

2. atom の一般化 R.R. Coifman-G. Weiss [3] は  $(p, \ell)$ -atom,  $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$ ,  $p \neq \ell$ , なるものと次のように定義した. 或る ball  $B$  が存在し,  $\text{supp } a \subset B$ ,  $(\frac{1}{|B|} \int_B |a(x)|^\ell dx)^{1/\ell} \leq |B|^{-1/p}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0$  となること.  $a$  は  $(p, \ell)$ -atom であると定義する. この定義においては  $a$  の定義2 d である空間が  $\mathbb{R}^n$  である必要はなく, 適当な距離と測度があればよく, 実際, [3] においては homogeneous type の空間において議論を展開している.

M.H. Taibleson-G. Weiss [18] は,  $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$ ,  $p \neq \ell$ ,  $s \geq [n(\frac{1}{p}-1)]$  なる  $p, \ell, s$  に対して  $a$  が  $(p, \ell, s)$ -atom であるとは, 或る ball  $B$  が存在して  $\text{supp } a \subset B$ ,  $(\frac{1}{|B|} \int_B |a(x)|^\ell dx)^{1/\ell} \leq |B|^{-1/p}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$  ( $|\alpha| \leq s$ ) となる事であると定義した.

1 に於て  $H^p(\mathbb{R}^n)$  を  $\mathcal{S}$  の双対空間  $\mathcal{S}'$  の中で構成した atom による Hardy class を Lipschitz space の双対空間の中で考える. その為に S. Campanato [1] が導入した空間を考える. 局所可積分関数  $f$  で

$$|f|_{\eta, \ell', s} = \sup_B \frac{1}{|B|^\eta} \inf_{P \in \mathcal{P}_s} \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f - P|^\ell dx \right)^{1/\ell} < \infty$$

なるものの全体を  $\mathcal{L}(\eta, \ell', s)$  と書く. ここで  $\eta > 0$ ,  $1 \leq \ell' \leq \infty$ ,  $s \geq 0$  は整数である.  $\mathcal{P}_s$  は  $s$  次以下の多項式全体.



$\mathcal{L}(\eta, \omega, s_0) \subset \mathcal{L}(\eta, \ell', s)$ ,  $1 \leq \ell' \leq \infty$ ,  $s_0 \leq s$ , であり.  
 $a$  が  $(p, \ell, s)$ -atom で,  $f \in \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell'} = 1$ ,  
 ならば,  $a \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  であり,  $a$  に対応する support を  $B$  と  
 すれば,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a \cdot f \, dx \right| \leq |B| \left( \frac{1}{|B|} \int_B |a|^{\ell} \, dx \right)^{1/\ell} \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f-P|^{\ell'} \, dx \right)^{1/\ell'}$$

( $P \in \mathcal{P}_s$ ) である.

$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a \cdot f \, dx \right| \leq \|f\|_{\frac{1}{p}-1, \ell', s} \leq \|f\|_{\frac{1}{p}-1, \infty, s_0}$   
 ( $s \geq s_0 = \lfloor n(\frac{1}{p}-1) \rfloor$ ). ここで,  $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s) = \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)/\mathcal{P}_s$   
 とおけば,  $(p, \ell, s)$ -atom  $a$  は,  $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \infty, s_0)^*$  の元と見做し  
 てよい. (実際は,  $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)^*$  と見做せる事を示したので  
 あるが.) この事より,

$$H^{p, \ell, s} = \left\{ f \in \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s_0)^*; f = \sum \lambda_j g_j, g_j \text{ は } (p, \ell, s)\text{-atom}, \right.$$

$$\left. \text{そして } \sum |\lambda_j|^p < \infty \right\}$$

と定義する. 1. の定理 5 は  $H^p(\mathbb{R}^n) = H^{p, \infty, s_0}$  を示している.

Taibleson-Klein [8] は,  $(p, \ell, s)$ -atom 及び  $(p, \infty, s)$ -atom によ  
 り  $(p, \ell, s_0)$ -atom 及び  $(p, \ell, s)$ -atom に分解できる事を直  
 接構成する方法で示している. そして次の結果を述べて  
 いる.

定理 6.  $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$ ,  $p \neq \ell$ ,  $s \geq s_0 = \lfloor n(\frac{1}{p}-1) \rfloor$  のとき  $H^{p, \ell, s} = H^{p, \infty, s_0}$

特異積分等の像を とらえる為に Coifman-Weiss [3] は molecule の概念を導入した. 更に Taibleson-Weiss [18] は  $\mathcal{D}$  を拡張して 次のような定義を与えている.  $M \in L^p(\mathbb{R}^n)$  が  $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule であるとは, 或る  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  があって

$$\|M\|_{\ell}^{a/\varepsilon} \cdot \|M(x)|x-x_0|^{-n\ell/(1-a/\varepsilon)}\|_{\ell} < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(x)x^\alpha dx = 0 \quad (|\alpha| \leq s)$$

が成り立つ事である. ここで  $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$ ,  $p \neq \ell$ ,  $s \geq s_0 = [n(\frac{1}{p}-1)]$ ,  $\varepsilon > \max\{\frac{1}{p}-1, \frac{s}{n}\}$ ,  $a = 1 + \varepsilon - \frac{1}{p}$ ,  $b = 1 + \varepsilon - \frac{1}{\ell}$ .

同様の定義を. 筆者は 10月の 実解析セミナーで 与えたのであるが. その定義では  $\ell = \infty$  の場合が除かれるので. 定義としては 上の定義の方が良い. 実解析セミナーでは  $M^+(x) \equiv \sup_{y>0} |(M * \varphi_y)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$  となる事より  $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$  を示したのであるが. Taibleson-Weiss は  $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule  $M$  が  $(p, \ell, s)$ -atom に分解できる事を 直接示して 次の結果を得ている.

定理 7  $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$ ,  $p \neq \ell$ ,  $s \geq s_0$  とし  
ておくと  $M$  が  $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule ならば  $M \in H^{p, \ell, s}$ .

この結果乙. 定理 6 とより  $M$  が  $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule ならば  $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$  が得られる.

$\ell = 2$  の場合が 応用上 最も重要である.

molecule が  $H^p(\mathbb{R}^n)$  に入る事を 別の方法で示しておく.

Proposition 3  $0 < p \leq 1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $p \neq \theta$ ,  $\varepsilon > \frac{1}{p} - 1$ ,  $s_0 = [n(\frac{1}{p} - 1)]$  とする.  $M$  が  $(p, \theta, s_0, \varepsilon)$ -molecule ならば,  $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$ .

実解析セミナーでは,  $\theta = 1$  の場合を省いたが,  $\theta = 1$  の場合も正しい.

Prop 3 の証明 定理 3 より,  $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\text{supp } \varphi \subset \{|x| \leq 1\}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$  なる  $\varphi$  をとり

$$M^\dagger(x) \equiv \sup_{t>0} |( \varphi_t * M )(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

を示せばよい.

$$\|M\|_\theta^{a/\theta} \cdot \|M(x)|x|^{-n\theta}\|_\theta^{1-(a/\theta)} \leq 1$$

としておく.  $\forall t > 0$  に対して.

$$\begin{aligned} (\varphi_t * M)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} M(z) \varphi_t(x-z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} M(z) \left\{ \varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-z \cdot \nabla)^k \varphi_t)(x) \right\} dz \end{aligned}$$

と表わされる.  $M^*$  を  $M$  の Hardy-Littlewood の max. ft. とすれば, 最初の等式より,

$$M^\dagger(x) \leq M^*(x).$$

次に,  $K_t(x, z) \equiv \varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-z \cdot \nabla)^k \varphi_t)(x)$  とおき, 二番目の等式より,

$$\begin{aligned} (\varphi_t * M)(x) &= \left( \int_{|z| < r} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}r \leq |z| < 2^j r} \right) M(z) K_t(x, z) dz \\ &\equiv I^t(x) + \sum_{j=1}^{\infty} J_j^t(x) \end{aligned}$$

とおく.  $r > 0$  は後で定めることとし.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \{M^+(x)\}^p dx &\leq \int_{|x| < 2r} \{M^*(x)\}^p dx \\
 &\quad + \int_{|x| \geq 2r} \left\{ \sup_{t>0} |I^t(x)| \right\}^p dx \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_{|x| \geq 2^{j+1}r} + \int_{2^j r \leq |x| < 2^{j+1}r} \right) \left\{ \sup_{t>c} |\bar{J}_j^t(x)| \right\}^p dx \\
 (1) \quad &\equiv K_1 + K_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (K_3^j + K_4^j)
 \end{aligned}$$

とおく.  $|K_\varepsilon(x, z)| \leq c |z|^{s_0+1} |x|^{-n-s_0-1}$  ( $|x| > 2|z|$ ,  $0 < \varepsilon < \infty$ ) なる事より.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |I^t(x)| &\leq c \|M\|_f r^{s_0+1+n/\delta'} |x|^{-n-s_0-1} \quad (|x| \geq 2r, \quad t > 0). \\
 |\bar{J}_j^t(x)| &\leq c |x|^{-n-s_0-1} (2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |M(z)| |z|^{n\delta} |t|^\varepsilon dz \right)^{1/\delta} \\
 (3) \quad &\leq c |x|^{-n-s_0-1} (2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon} \|M\|_f^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \\
 &\quad (|x| \geq 2^{j+1}r, \quad t > c).
 \end{aligned}$$

また,  $|(\mathcal{E} \cdot \nabla)^k \varphi_\varepsilon(x)| \leq c |y|^k |x|^{-n-k}$  なる事から,  $|K_\varepsilon(x, z)| \leq \varphi_\varepsilon(x-z) + c \sum_{k=0}^{s_0} |y|^k |x|^{-n-k}$ .  $M_0(x) \equiv M(x) |x|^{n\delta}$  とおけば,

$$(4) \quad |\bar{J}_j^t(x)| \leq c (2^j r)^{-n\delta} M_0^*(x) + c \sum_{k=0}^{s_0} |x|^{-n-k} (2^j r)^{k-n\varepsilon} \|M\|_f^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})}$$

$K_1$  については,  $\delta \neq 1$  の場合は,  $\max. f_\delta$  の  $L^{\delta}$ -有界性より

$$K_1 \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p \quad \text{が得られる.} \quad \delta = 1 \text{ の場合は, } p < 1$$

に注意すれば,  $K_1 \leq c r^{n(1-p)} \|M\|_1^p$ . 従って,  $1 \leq \delta \leq \infty$  に對して

$$K_1 \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p$$

が得られる.  $K_2$  に対しては, (2) を用いて

$$K_2 \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p$$

が,  $p(n+s_0+1) > n$  なる事より得られる.  $K_3^j$  には (3) を用いて

$K_3^j \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-pan_j}$  が得られる.  $\alpha = 1 + \varepsilon - \frac{1}{p} > 0$  なる事より.

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_3^j \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

$K_4^j$  に対しては. 先ず (4) より.

$$\begin{aligned} K_4^j &\leq c (2^j r)^{-np\varepsilon} \int_{|x| < 2^{j+n} r} \{M_\varepsilon^*(x)\}^p dx \\ &\quad + c \sum_{k=0}^{s_0} (2^j r)^{p(k-n\varepsilon)} \|M\|_q^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \int_{2^k r \leq |x| < 2^{j+n} r} |x|^{-p(n+k)} dx \\ &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

とおく.  $L_2 \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1 + \log 2^j) 2^{-pan_j} L_1^{1/2}$   
 関しては.  $K_1$  の場合と同様にして  $L_1 \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-npaj}$  が得られる. ゆえに.

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_4^j \leq c \left( r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} r^{-1/n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

以上の評価を (1) に用いて.  $r = \|M\|_q$  とすれば.

$$\int_{R^n} \{M^+(x)\}^p dx \leq c \text{ が得られる. (f.e.d.)}$$

3. 応用例 atom と molecule の議論を Riesz-Bochner 平均に適用することが出来る. multiplier operator  $S^\delta$ ,  $\delta > 0$ , 上.  $(S^\delta f)^\wedge(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi)$  により定義すれば. 次の事が成立する.

定理 8 (i)  $0 < p \leq 1$ ,  $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$  ならば.

$S^\delta$  は  $H^p(R^n)$  から  $H^p(R^n)$  への有界作用素である.

(ii)  $0 < p \leq 1$ ,  $\delta \leq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$  ならば.  $S^\delta f \notin H^p(R^n)$

となる  $f \in H^p(R^n)$  が存在する.

証明 (i)  $a$  が  $(p, 2, s_0)$ -atom で、対応する ball を  $B \equiv B(\varepsilon, r)$ , 原点中心の半径が  $r$  の ball, とし.  $S^\varepsilon a$  が molecule とする事を示す.

$$K(x) \equiv 2^{\delta+(n/2)} \pi^{n/2} \Gamma(\delta+1) J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|) (2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta} \text{ とおける.}$$

$$(S^\delta a)(x) = (K * a)(x).$$

$$1 + \frac{s_0}{n} \leq \frac{1}{p} < 1 + \frac{s_0+1}{n}, \quad \frac{n-1}{2} + s_0 < \delta \leq \frac{n-1}{2} + s_0 + 1,$$

$$\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$$

としておく. 先ず

$$(1) \quad \|S^\delta a\|_2 \leq \|a\|_2 \leq C r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$$

$$\left( \int_{|x| \leq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} \|S^\delta a\|_2$$

$$(2) \quad \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

$$\left( \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \right)^{1/2} \text{ の評価をする. } \delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$$

であるから  $\frac{1}{n}(\delta - \frac{n+1}{2}) > \varepsilon > \frac{1}{p} - 1$  なる  $\varepsilon > 0$  をとてお

$$く. |y| < r \text{ に対して. } |K(x-y)| \leq C |x-y|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}} \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}}$$

なる事より.

$$(3)' \quad |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \|a\|_1 \leq C r^{n(1-\frac{1}{p})} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$$

$$(3) \quad \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \leq C r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})-2(\delta-\frac{n+1}{2})}$$

また.  $a$  が多項式と直交する事より.  $(S^\delta a)(x) = \int_{|y| < r} a(y) \cdot \{$

$$K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} (y \cdot \nabla)^k K(x) \} dy. \text{ として. } K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} (y \cdot \nabla)^k$$

$$K(x) = O(|y|^{s_0+1} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}) \text{ であるから}$$

$$(4)' \quad |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \int_{|y| < r} |y|^{s_0+1} |a(y)| dy \leq C r^{s_0+1+n-\frac{n}{p}} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$$

$$(4) \quad \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \leq C r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})+2(\frac{n+1}{2}+\delta_0+1-\delta)}$$

$r \geq 1$  の場合は (3) を、 $r \leq 1$  の場合は (4) を用いて、

$$\left( \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

従って、(2) の評価とより

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

ここで (1) とより

$$\|S^\delta a\|_2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})/2(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} \leq C.$$

$$(3)', (4)' \text{ とより } |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{1+\varepsilon-\frac{1}{p}}} \quad (|x| \geq 2r). \text{ 従って}$$

$$\text{て } |(S^\delta a)(x)| |x|^{s_0} \leq C |x|^{-n-(\delta-s_0-\frac{n+1}{2})} \quad (|x| \geq 2r). \quad \forall \varepsilon > 0, |x|$$

$\leq s_0$  かつ  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  に対して  $(S^\delta a)(x) \cdot x^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$  であるから、

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha (S^\delta a)(x) dx = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (S^\delta a)^\wedge(0) = 0.$$

従って  $S^\delta a$  は  $(p, 2, \varepsilon)$ -molecule である。

$$(ii) \quad \widehat{\varphi}_1(\xi) = 1 \quad (|\xi| \leq 1), \quad \text{supp } \widehat{\varphi}_2(\xi) \subset (|\xi| \leq \frac{1}{2})$$

かつ  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$  とし、 $f \equiv \varphi_1 - \varphi_2$  とおけば、 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ 。そして  $S^\delta f = S^\delta \varphi_1 - S^\delta \varphi_2$ 、 $(S^\delta \varphi_2)^\wedge(\xi) = (1-|\xi|^2)^\delta \widehat{\varphi}_2(\xi)$

であるから  $S^\delta \varphi_2 \in \mathcal{S}$ 。一方  $S^\delta \varphi_1(x) = K(x) \notin L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\left( \delta \leq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2} \right). \quad (\text{f. e. d.})$$

定理 8 の (i) は、Prop. 2 を用いて、Fefferman-Stein [7] の Th. 10 によって得られる。また、A. Miyachi [12] の Th. 1', 2' と interpolation によって得られる。

定理 8 に関連した結果が [15] に報告されている。

$\delta > 0, R > 0$  とし. multiplier operator  $S_R^\delta$  を

$$(S_R^\delta f)^\wedge(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)_+^\delta \hat{f}(\xi)$$

で定義し. その max. operator  $S_*^\delta$  を

$$(S_*^\delta f)(x) = \sup_{R>0} |(S_R^\delta f)(x)|$$

で定義する.

定理 8 の (i) は.  $0 < p \leq 1, \delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$  のとき.

$\|S_R^\delta f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ ,  $C$  は  $R$  に無関係, とする事を示している. Stein-Taibleson-Weiss は [15] で. 次の結果を報告している.

定理 9  $0 < p < 1, \delta = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$  のとき.

$$\exists C; |\{x; (S_*^\delta f)(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\right)^p \quad (\lambda > 0, f \in H^p(\mathbb{R}^n))$$

この証明を試みたので.  $\phi$  を紹介する. [15] で述べられているように. 次の Lemma を示す.

Lemma  $0 < p < 1$ , non-negative f.f.  $g_j$  と positive number  $c_j$  が.  $|\{x; g_j(x) > \lambda\}| \leq \lambda^{-p} \quad (\lambda > 0, j=1, 2, \dots)$ ,  $\sum_{j=1}^\infty c_j^p \leq 1$  であるならば.

$$|\{x; \sum_{j=1}^\infty c_j g_j(x) > \lambda\}| \leq \frac{2-p}{1-p} \lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \infty)$$

証明 (E.M. Stein - N.J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. Trans. A.M.S. 140 (1969) p.37 Lemma 2.3 の手法による.)  $\lambda > 0$  を与えておく.  $u_j, v_j$  を次のように定義する.

$$u_j(x) = g_j(x), \text{ if } g_j(x) > \lambda/c_j, = 0, \text{ if } g_j(x) \leq \lambda/c_j$$



$$v_j(x) = f_j(x) - u_j(x)$$

すなわち  $(\sum g_j u_j = 0) \cap (\sum g_j v_j \leq \lambda) \subset (\sum g_j f_j \leq \lambda)$ . 同様にして

$$(1) \quad |(\sum g_j f_j > \lambda)| \leq |(\sum g_j u_j > 0)| + |(\sum g_j v_j > \lambda)|$$

$$\text{また } (\sum g_j u_j > 0) \subset \bigcup_j (u_j > 0) = \bigcup_j (f_j > \lambda/g_j),$$

$$|(\sum g_j u_j > 0)| \leq \sum_j |(\sum g_j u_j > 0)| \leq \sum_j \lambda^{-p} g_j^p. \text{ 同様にして}$$

$$(2) \quad |(\sum g_j u_j > 0)| \leq \lambda^{-p} \sum g_j^p \leq \lambda^{-p}$$

$$\text{また } (v_j > t) = \emptyset \quad (t \geq \lambda/g_j), \quad (v_j > t) = (t < f_j \leq \lambda/g_j) \subset$$

$$(f_j > t) \quad (t < \lambda/g_j). \text{ 従って}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_j(x) dx &= \int_0^\infty |(v_j > t)| dt \leq \int_0^{\lambda/g_j} |(f_j > t)| dt \\ &\leq \int_0^{\lambda/g_j} t^{-p} dt = (1-p)^{-1} (\lambda/g_j)^{1-p} \end{aligned}$$

従って

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum g_j v_j(x) dx \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p} \sum g_j^p \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p}$$

$$(1), (2), (3) \text{ より } |(\sum g_j f_j > \lambda)| \leq \frac{2^{-p}}{1-p} \lambda^{-p} \text{ が得られる. (f.e.d.)}$$

定理 9 の証明  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$  とす。すなわち  $f = \sum g_j a_j$ ,

$\sum |g_j|^p < 2 \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p$ ,  $a_j$  は  $(p, \omega, s_0)$ -atom, と表わさるから

Lemma 8 より  $(p, \omega, s_0)$ -atom  $a$  に対して

$$(*) \quad |\{x; (S_*^\varepsilon a)(x) > \lambda\}| \leq A \lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \omega)$$

が示さなければならない。ここで  $A$  は  $n, p$  のみに関係する

定数である。

$\operatorname{supp} a \subset \{|x| \leq r\}$ ,  $\|a\|_\infty \leq r^{-n/p}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$  ( $|\alpha| \leq s_0$ ) として  $(*)$  を示せば十分である。

$\delta > (n-1)/2$  であるから

$$(1) \quad (S_{\star}^{\delta} a)(x) \leq c a^{\star}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$K(x) = 2^{\delta+(n/2)} \pi^{n/2} \Gamma(\delta+1) J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|) (2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta}, \quad K_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)$$

とす。  $(S_R^{\delta} a)(x) = (K_{R^{-1}} \star a)(x)$ .  $|x| \geq 2r$  に対して  $(K_{R^{-1}} \star a)(x)$  を評価する。

$$\begin{aligned} (K_{R^{-1}} \star a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_{R^{-1}}(x-y) a(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-y \cdot \nabla)^k K_{R^{-1}})(x) \right\} a(y) dy \end{aligned}$$

と表わす。  $R^{-1} > |x| - r$  の場合  $K_{R^{-1}}(x, y) = K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-y \cdot \nabla)^k K_{R^{-1}})(x) = \frac{1}{(s_0+1)!} ((-y \cdot \nabla)^{s_0+1} K_{R^{-1}})(x - \varepsilon y)$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , とあるから  $|y| < r$  に対して  $|K_{R^{-1}}(x, y)| \leq c |y|^{s_0+1} R^{n+s_0+1} \leq c |y|^{s_0+1} |x|^{-n-s_0-1}$  である。

$$\begin{aligned} |K_{R^{-1}} \star a(x)| &\leq c |x|^{-n-s_0-1} \int_{|y| < r} |y|^{s_0+1} |a(y)| dy \\ (2) \quad &\leq c r^{s_0+1+n-(n/p)} |x|^{-n-s_0-1} \leq c |x|^{-n/p} \quad (R^{-1} > |x| - r) \end{aligned}$$

$R^{-1} \leq |x| - r$  の場合。 先ず  $|K_{R^{-1}}(x-y)| \leq c R^n (R|x-y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leq c R^{\frac{n+1}{2}-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$  ( $|y| < r$ ) なる事より

$$\begin{aligned} |K_{R^{-1}} \star a(x)| &\leq c R^{\frac{n+1}{2}-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \int_{|y| < r} |a(y)| dy \\ (3) \quad &\leq c (Rr)^{-(\delta-\frac{n+1}{2})} |x|^{-\frac{n+1}{2}} \quad (R^{-1} \leq |x| - r) \end{aligned}$$

もう一つの評価として  $|K_{R^{-1}}(x, y)| \leq c |y|^{s_0+1} R^{n+s_0+1} (R|x-\varepsilon y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leq c |y|^{s_0+1} R^{-\delta+\frac{n+1}{2}+s_0} |x|^{-\delta-\frac{n+1}{2}}$  ( $|y| < r$ ) を用いて

$$(4) \quad |K_{R^{-1}} \star a(x)| \leq c (Rr)^{\frac{n+1}{2}+s_0+1-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}} \quad (R^{-1} \leq |x| - r)$$

$(n-1)/2 < \delta < (n-1)/2 + s_0 + 1$  であるから  $Rr \geq 1$  のとき (3)

$Rr \leq 1$  のときは (4) を用いて.

$$(5) \quad |(K_{Rr} * A)(x)| \leq c |x|^{-\frac{n}{p}} \quad (Rr \leq |x| - r).$$

$$(2) \text{ と } (5) \text{ より } (S_*^\delta A)(x) \leq c |x|^{-n/p} \quad (|x| \geq 2r). \quad \text{故, } \tau$$

$$(6) \quad \{x; |x| \geq 2r, (S_*^\delta A)(x) > \lambda\} \leq c \lambda^{-p}.$$

また (1) より

$$\begin{aligned} \int_{|x| < 2r} \{(S_*^\delta A)(x)\}^p dx &\leq c r^{n(1-\frac{p}{2})} \|S_*^\delta A\|_2^p \\ &\leq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|A\|_2^p \leq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} = c. \end{aligned}$$

$$\text{よって } |\{x; |x| < 2r, (S_*^\delta A)(x) > \lambda\}| \leq c \lambda^{-p}. \quad \text{これと (6) とより}$$

$$|\{x; (S_*^\delta A)(x) > \lambda\}| \leq A \lambda^{-p} \quad \text{と } (*) \text{ が得られる. (f.e.d.)}$$

### 参考文献

1. S. Campanato, Proprietà di una famiglia di spazi funzionali. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964) 137-160.
2. R.R. Coifman, A real variable characterization of  $H^p$ . Studia Math. 51 (1974) 269-274.
3. R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. A.M.S. 83 (1977) 569-645.
4. P.L. Duren, Theory of  $H^p$  spaces. Academic Press (1970)
5. P.L. Duren, B.W. Romberg and A.L. Shields, Linear functionals on  $H^p$  spaces with  $0 < p < 1$ . J. Reine Angew. Math.

238 (1969)

6. C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation.  
Bull. A.M.S. 77 (1971) 587-588.
7. C. Fefferman and E.M. Stein,  $H^p$  spaces of several variables.  
Acta Math. 129 (1972) 137-193.
8. A.P. Frasier, The dual space of  $H^p$  of the polydisc for  $0 < p < 1$ . Duke Math. J. 39 (1972) 369-379.
9. B. Grerholm, On the structure of the spaces  $L_k^{p,\lambda}$ .  
Math. Scand. 26 (1970) 241-254.
10. C. Herz,  $H^p$  spaces of martingales,  $0 < p \leq 1$ . Z.W. 28 (1974) 189-205.
11. R.H. Latter, A characterization of  $H^p(\mathbb{R}^n)$ . In terms of atoms. Studia Math. 62 (1978) 93-101.
12. A. Miyachi, Fourier multipliers for  $H^p(\mathbb{R}^n)$ . Preprint
13. P. Sjölin, An  $H^p$  inequality for strong singular integrals.  
Math. Z. 165 (1979) 231-238.
14. E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton (1970).
15. E.M. Stein, M.H. Taibleson and G. Weiss, Weak Type estimates for maximal operators on certain  $H^p$  classes  
Notice A.M.S. 26 (1979) No. 6 A.548.

16. E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. *Acta Math.* 103 (1960) 25-62.
17. E. M. Stein and N. J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. *Trans. A. M. S.* 140 (1969) 35-54.
18. M. H. Taibleson and G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces. Preprint.
19. A. Uchiyama, On the characterization of  $H^p(\mathbb{R}^n)$  with atoms. Preprint.
20. T. Walsh, The dual of  $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$  for  $p < 1$ . *Canad. J. Math.* 25 (1973) 567-577.